



TITLE:

# 連続関数のある種の平均について (応用函数解析の研究)

AUTHOR(S):

伊藤, 隆司; 奈良, 知恵

---

CITATION:

伊藤, 隆司 ...[et al]. 連続関数のある種の平均について(応用函数解析の研究). 数理解析研究所講究録 1983, 504: 66-72

ISSUE DATE:

1983-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103719>

RIGHT:

# 連続関数のある種の平均について

武蔵工大 伊藤隆司

奈良知恵

$I$  を実数空間内の任意の区間とする。  $I$  上で定義された狭義単調（増加又は減少）な実数値連続関数  $g$  と  $0 \leq t \leq 1$  なる数  $t$  を固定して、区間  $I$  内の二数  $a, b$  の平均値を Hardy-Littlewood-Polya [2] は

$$(1) \quad g^{-1} \{ t g(a) + (1-t) g(b) \}$$

と定義している。

この定義は無次元にまで自然に拡張される。即ち  $X$  をコンパクトな空間、  $X$  上の  $I$  に値をとる連続関数の全体を  $C(X; I)$  とする。上に述べた関数  $g$  と  $X$  上の確率測度  $\mu$  を固定して、  $C(X; I)$  に属する関数  $f$  の平均値を

$$(2) \quad g^{-1} \left\{ \int_X g \circ f \, d\mu \right\}$$

と定義する。勿論  $X$  が二点よりなる場合 (2) は (1) となる。

この  $f$  の平均値を  $f$  の Hardy-Littlewood-Polya 型の平均値と呼び  $M_{g,\mu}(f)$  と書くことにする。更に、 $g$  と  $\mu$  を固定し  $f$  を変数とみて  $C(X;I)$  上の汎関数  $M_{g,\mu}$  が得られるがこの様な汎関数を  $C(X;I)$  上の HLP-mean と呼ぶことにする。

$C(X;I)$  上に一様収束の位相及び普通の意味の順序構造を考えた時、HLP-mean  $M_{g,\mu} = M$  は  $C(X;I)$  上の汎関数として次の性質 I), II), III), (\*) 及び IV) をもつ事は明らかである。

I)  $M$  は連続,

II)  $M(a1) = a \quad (\forall a \in I),$

III)  $M(f) \leq M(g) \quad (\forall f \leq g),$

更に Fubini の定理から

(\*)  $M_g[M_x[h(x,y)]] = M_x[M_g[h(x,y)]] \quad \forall h \in C(X \times X; I)$

が成立する。ここに  $M_x, M_g$  はそれぞれ  $x, y$  を変数とする関数に  $M$  を作用させる事とする。

特に  $\mu$  の台が  $X$  全体ならば

IV)  $M(f) < M(g) \quad (\forall f \leq g \text{ かつ } f \neq g)$

が成立する。

そこで一般に  $C(X;I)$  上の汎関数  $M$  での性質 I), II) 及び III)

を満足するものを  $C(X; I)$  上の mean と定義する。更に性質 IV) を満足するとき狭義単調増加な mean と呼ぶことにする。

(\*) を bisymmetric equation と呼び、mean  $M$  が (\*) を満足するとき bisymmetric mean と呼ぶ。

明らかに HLP-mean は bisymmetric mean であるが逆は一般に成立しない。しかし「狭義の単調増加な bisymmetric mean は HLP-mean である」事が成立する。即ち狭義単調増加という条件のもとでは、bisymmetric equation (\*) が Hardy-Littlewood-Polya 型の mean を完全に特徴付けていることになる。

定理  $C(X; I)$  上の mean  $M$  が狭義単調増加で bisymmetric equation (\*) を満足しているならば、 $I$  上で定義された狭義単調連続関数  $\varphi$  と  $X$  上の確率測度  $\mu$  でその台が  $X$  全体となるものが存在して

$$M(f) = \varphi^{-1} \left\{ \int_X \varphi \circ f \, d\mu \right\} \quad \forall f \in C(X; I)$$

が成立する。こゝに  $\varphi$  は affine 同値を除いて一意で  $\mu$  も又一意に決まる。

証明の筋道 まず mean の間の 可換性 を導入する。  $M$  を  $C(X; I)$  上の mean,  $L$  を  $C(Y; I)$  上の mean とする ( $X, Y$  は

コンパクトな空間)。  $M$  と  $L$  が可換であるとはすべての  $f \in C(X \times Y; I)$  に対して

$$L_y [M_x [f(x, y)]] = M_x [L_y [f(x, y)]]$$

が成立することとする。この様に定義すれば  $M$  が *bisymmetric mean* とは  $M$  が  $M$  自身と可換なこととなる。

定理の証明は次の3段階に分けられる。

1. HLP-mean と可換な mean 大雑把に言って「HLP-mean と可換な mean は又 HLP-mean」が成立する。

Proposition 1  $M, L$  をそれぞれ  $C(X; I)$  及び  $C(Y; I)$  上の mean とする。  $M$  と  $L$  とが可換でかつ  $L$  が  $C(Y; I)$  上の point evaluation でない HLP-mean で  $L = L_{\varphi, \mu}$  と表現されるとする。このとき  $M$  も又  $C(X; I)$  上の HLP-mean で  $M = M_{\varphi, \nu}$  と表現される。ここに  $\nu$  は  $X$  上の確率測度で一意的に決まる。

2. 二次元の mean  $X$  が二点よりなるとき  $C(X; I)$  は  $I \times I$  と同一視出来て、  $C(X; I)$  上の mean は  $I \times I$  上の単調増加な連続関数  $N$  で  $N(a, a) = a$  ( $\forall a \in I$ ) となるものになる。これを二次元の mean と呼ぶ。二次元の mean  $N$  が *bisymmetric* とはすべての  $a, b, c, d \in I$  に対して

$N[N(a, b), N(c, d)] = N[N(a, c), N(b, d)]$  ( $b$  と  $c$  とが可換) が成立することである。

次の proposition は証明しようとしている定理の二次元の場合にあっている。しかしこの結果は J. Aczél の本 [1] の中ですでに知られている。

Proposition 2  $I \times I$  上の二次元の mean  $N$  が狭義単調増加で bisymmetric ならば  $I$  上で定義された狭義単調な連続関数  $\varphi$  と  $0 < t < 1$  なる  $t$  が存在して

$$N(a, b) = \varphi^{-1} \{ t \varphi(a) + (1-t) \varphi(b) \} \quad \forall a, b \in I$$

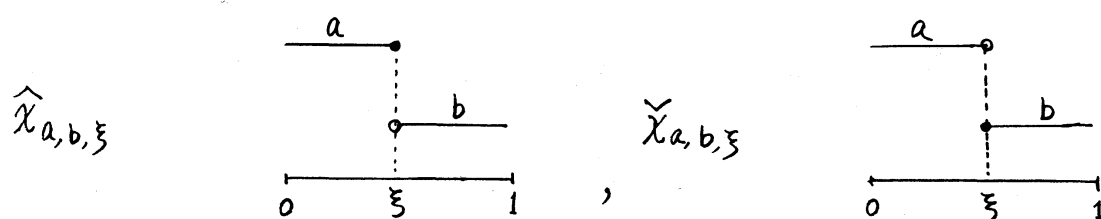
となる。こゝに  $\varphi$  は affine 同値を除いて一意でもも又一意に決まる。

これは次の様にしても示される。まず  $N$  が変数に関して対称:  $N(a, b) = N(b, a)$  を仮定する。この場合は bisymmetric equation を用いて構造的に  $\varphi$  が作れて  $N(a, b) = \varphi^{-1} \{ \frac{1}{2} \varphi(a) + \frac{1}{2} \varphi(b) \}$  ( $a, b \in I$ ) が示される。非対称の場合は、 $N$  から出発して帰納的に  $N_{n+1}(a, b) = N[N_n(a, b), N_n(a, b)]$  として

$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(a, b) = N_\infty(a, b)$  を作る。このとき  $N_\infty$  が二次元の狭義単調増加な bisymmetric mean で対称であり、更に  $N_\infty$  と  $N$  とが可換なことが証明できる。よって Proposition 1 を用いればよい。

### 3. $C([0,1];I)$ 上の mean と可換な二次元の mean を作る事

$M$  を  $C([0,1];I)$  上の mean とする。  $M$  は もともと  $C([0,1];I)$  上で定義されているが、この定義域を  $[0,1]$  上の  $I$  に値をとる半(上半又は下半)連続関数の全体にまで自然に拡張される事に注意する。  $a, b \in I$  と  $0 < \xi < 1$  に対して記号  $\hat{\chi}_{a,b,\xi}$  及び  $\check{\chi}_{a,b,\xi}$  で  $[0,1]$  上の次の様な上半及び下半連続関数を表わすものとする。



Proposition 3.  $M$  を  $C([0,1];I)$  上の狭義単調増加な bisymmetric mean とする。このとき高々可算個の  $\xi \in (0,1)$  を除いて

$$M(\hat{\chi}_{a,b,\xi}) = M(\check{\chi}_{a,b,\xi}) \quad \forall a, b \in I$$

が成立する。この様な  $\xi$  に対して、この値をもって  $(a,b)$  における値として得られる  $I \times I$  上の関数  $N$  は二次元の mean で狭義単調増加かつ bisymmetric である。更に  $N$  は  $M$  と可換となるだけでなく  $M$  と可換な mean とはすべて可換になる。

この Proposition の証明の主要な点は  $N$  が  $I \times I$  上連続なこと、 $N$  が bisymmetric equation を満たし  $M$  と可換なこと、 $N$  が  $I \times I$  上

狭義単調増加なことの三点である。

以上の三つの proposition を用いて定理の証明は次の様になる。  $M$  を定理で与えられた mean とする。 Proposition 1 及び Proposition 2 から  $M$  と可換な二次元の mean  $N$  が狭義単調増加かつ bisymmetric なものの存在を示せばよい。  $X$  が非連結のとき  $N$  の作り方は容易である。  $X$  が連結のときは ( $X$  は二点以上よりなるとしてよい)  $X$  から区間  $[0,1]$  の上への連続写像  $\tau$  をとって、  $M^\tau(g) = M(g \circ \tau)$  ( $g \in C([0,1]; I)$ ) として  $M$  を  $C([0,1]; I)$  上の mean  $M^\tau$  に移す事が出来る。このとき  $M^\tau$  は mean として  $M$  の性質をすべて受継ぎ  $M$  と可換になる。ここで Proposition 3 を  $M^\tau$  に適用して  $N$  が作れる (詳しい証明は [3] 参照)。

以上。

#### References

- [1] J. Aczél, Lectures on functional equations and their applications, Academic Press, New York and London, 1966.
- [2] G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Pólya, Inequalities, Cambridge University Press, 1934.
- [3] T. Ito and C. Nara, Hardy-Littlewood-Pólya's means of continuous functions, to appear.